Lógica Matemática

16 *“Completamento” de $\mathcal{L}$* ■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

“Completamento”

TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^*$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$. Então, existe uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}^*$.

Observações:

1. Aqui estamos considerando uma extensão de um sistema como um novo sistema que amplia o conjunto de axiomas ou o conjunto de teoremas do sistema anterior. É uma definição mais geral do que a dada anteriormente no vídeo 14.
2. Para demonstrarmos este resultado, precisaremos antes considerar uma enumeração das fórmulas de $\mathcal{L}$.

TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^*$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$. Então, existe uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}^*$.

Demonstração:

Seja $A_0, A_1, A_2, \ldots$ uma enumeração das fórmulas de $\mathcal{L}$.

Construiremos uma sequência $J_0, J_1, J_2, \ldots$ de extensões de $\mathcal{L}^*$ da seguinte maneira:

- $J_0 = \mathcal{L}^*$
- Para $n \geq 1$,
  - Se $\vdash_{J_{n-1}} A_{n-1}$, então $J_n = J_{n-1}$
  - Caso contrário, J_n é obtido de J_{n-1} acrescentando-se a fórmula $(\neg A_{n-1})$ como um novo axioma.

TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^*$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$. Então, existe uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}^*$.

Demonstração:

Exemplo:

$n = 1$. Verifico se $\vdash_{J_0} A_0$.

Se sim, então $J_1 = J_0$ (não há alteração).

Caso contrário, então faço uma ampliação: J_1 é obtido de J_0 acrescentando $(\neg A_0)$ como um novo axioma.

$n = 2$. Verifico se $\vdash_{J_1} A_1$.

Se sim, então $J_2 = J_1$ (não há alteração).

Caso contrário, então faço uma ampliação: J_2 é obtido de J_1 acrescentando $(\neg A_1)$ como um novo axioma. E por aí vai....

TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^*$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$. Então, existe uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}^*$.

Demonstração:

Esse procedimento funciona por quê?

- $\mathcal{L}^*$, por hipótese do teorema, é consistente. Logo, J_0 é consistente (caso base).
- J_1, se for igual a J_0, é consistente. Se ele foi obtido de J_0 pelo acréscimo de $(\neg A_0)$, ele também é consistente pelo resultado 1 do vídeo 14.
- E assim por diante, isto é, pelo resultado 1 do vídeo 14, se J_{n-1} é consistente, então J_n é consistente. Por indução, todo sistema J_n é consistente.

TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^*$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$. Então, existe uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}^*$.

Demonstração:

Vamos agora definir um sistema J como sendo uma extensão de $\mathcal{L}^*$, que possui como axiomas todas as fórmulas que são axiomas de pelo menos um dos sistemas J_n definidos anteriormente.

Vamos mostrar que J é consistente e completo.

TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^*$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$. Então, existe uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}^*$.

Demonstração:

Afirmação 1: J é consistente.

Suponha que J é inconsistente.

Então, existe uma fórmula A tal que $\vdash_J A$ e $\vdash_J (\neg A)$.

Lembrando que uma prova é uma sequência finita de fórmulas que são axiomas ou que foram obtidas por MP.

Assim, as provas de A e $(\neg A)$ em J devem utilizar necessariamente um número finito de axiomas de J, digamos, m e n.

Logo, existe um número k grande o suficiente para que estes axiomas utilizados sejam axiomas de J_k.

Assim, segue que $\vdash_{J_k} A$ e $\vdash_{J_k} (\neg A)$, contrariando o fato de que J_k é consistente.

TEOREMA 1: Seja $\mathcal{L}^*$ uma extensão consistente de $\mathcal{L}$. Então, existe uma extensão consistente e completa de $\mathcal{L}^*$.

Demonstração:

Afirmação 2: J é completo.

Seja A uma fórmula de $\mathcal{L}$. Ela dever aparecer na lista em algum momento, digamos, $A = A_k$.

Se $\vdash_{J_k} A_k$, então devemos ter $\vdash_J A_k$, já que J é uma extensão de J_k.

Caso contrário, então, pela construção inicial dos sistemas J_i, o sistema J_{k+1} possui $(\neg A_k)$ como axioma,

assim, $\vdash_{J_{k+1}} (\neg A_k)$, o que implica que $\vdash_J (\neg A_k)$.

Logo, pelo menos uma dentre as fórmulas A_k e $(\neg A_k)$ é teorema de J. ■

Lógica Matemática

16 *"Completamento" de $\mathcal{L}$*

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br